Clase 25

ÁLGEBRA LINEAL

COMPLEMENTOS Y PROYECCIONES ORTOGONALES

Complementos ortogonales

Definición: Supongamos que W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. El complemento ortogonal de W se define por:

$$W^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot w = 0 \text{ para todo } w \in W\}.$$

Complementos ortogonales

Definición: Supongamos que W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. El complemento ortogonal de W se define por:

$$\boxed{W^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot w = 0 \text{ para todo } w \in W\}.}$$

En otras palabras, $W^{\perp}$ contiene todos los vectores que son ortogonales a W.

Ejemplos

Ejemplo: Sea

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = x \right\}$$

Ejemplos

Ejemplo: Sea

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \, y = x \right\} = gen \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$x + y = 0 \qquad \boxed{y = -x}$$

Ejemplo: Sea

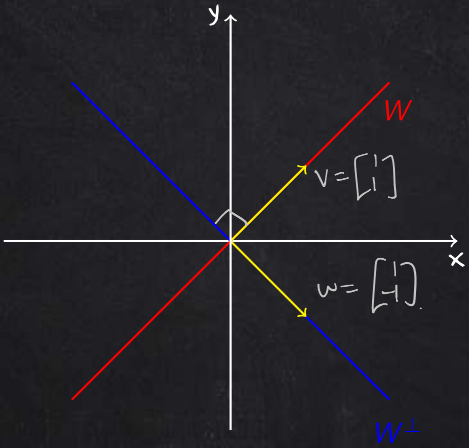
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = x \right\} = gen \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

En este caso tenemos que

$$W^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = -x \right\} = gen \left\{ \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}} \right\}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 - 1 = 0.$$

Ejemplos



y
x
W
$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
$w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
$W^{\perp}$

Ejemplos

Ejemplo: Sea

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \underline{x + y - z} = \underline{\underline{0}} \right\}$$

$z = x + y.$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplos

Ejemplo: Sea

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \boxed{x + y - z = 0} \right\} = gen\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow x + z = 0. \quad \boxed{x = -z}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \qquad y + z = 0 \quad \underline{y = -z}.$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ -z \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplos

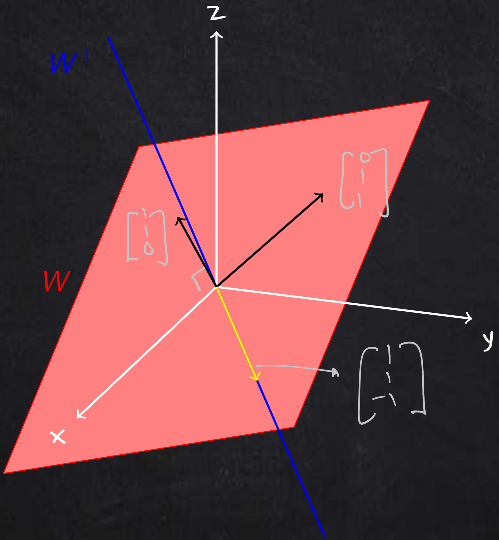
Ejemplo: Sea

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y - z = 0 \right\} = gen \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

En este caso tenemos que

$$W^{\perp} = gen \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ejemplo



z
$W^{\perp}$
W
y
x
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Complementos ortogonales

En general, si W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$W = gen\{u_1, u_2, ..., u_k\},$$

Complementos ortogonales

En general, si W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$W = gen\{u_1, u_2, \ldots, u_k\},$$

entonces $W^{\perp}$ contiene todos los vectores $v \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\underline{v \cdot v_1} = 0, \quad \underline{v \cdot v_2} = 0, \quad \ldots, \quad \underline{v \cdot v_k} = 0.$$

Complementos ortogonales

En general, si W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$W = gen\{u_1, u_2, ..., u_k\},$$

entonces $W^{\perp}$ contiene todos los vectores $v \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$v \cdot v_1 = 0, \quad v \cdot v_2 = 0, \quad \ldots, \quad v \cdot v_k = 0.$$

En otras palabras

$$W^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot v_1 = 0, \quad v \cdot v_2 = 0, \quad \ldots, \quad v \cdot v_k = 0\}.$$

Preguntas

Teorema

Teorema: Supongamos que que $W \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio, entonces $W^{\perp}$ también es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Teorema

Teorema: Supongamos que que $W \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio, entonces $W^\perp$ también es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Prueba: Supongamos que $v_1, v_2 \in W^\perp$.
Esto significa que $v_1 \cdot w = 0$, $v_2 \cdot w = 0$ para todo $w \in W$. Así $(v_1 + v_2) \cdot w = \cancel{v_1 \cdot w}^{0} + \cancel{v_2 \cdot w}^{0} = 0$.
para todo $w \in W$. Por lo tanto $v_1 + v_2 \in W^\perp$.
Por otro lado, si $c \in \mathbb{R}$ y $v_1 \in W^\perp$, entonces
$(c v_1) \cdot w = c(\cancel{v_1 \cdot w}^{0}) = 0$ para todo $w \in W$.
Por lo tanto $c v_1 \in W^\perp$.

Propiedades

Propiedades: Supongamos que $W \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio. Entonces:

1. $\underline{(W^{\perp})^{\perp}} = W$.

Propiedades

Propiedades: Supongamos que $W \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio. Entonces:

1. $(W^\perp)^\perp = W$.
2. $W \cap W^\perp = \{0\}$.

Propiedades

Propiedades: Supongamos que $W \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio. Entonces:

1. $(W^{\perp})^{\perp} = W$.
2. $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.
3. $dim(W) + dim(W^{\perp}) = n$.

Preguntas

$$\boxed{\begin{array}{l} W = \mathbb{R}^n \\ W^\perp = \{0\} \end{array}}$$

Subespacios fundamentales

Supongamos que A es una matriz de tamaño $m \times n$. Los cuatro subespacios fundamentales de A son los siguientes subespacios:

Subespacios fundamentales

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{mn} \end{bmatrix}$ m filas

n columnas

Supongamos que A es una matriz de tamaño $m \times n$. Los cuatro subespacios fundamentales de A son los siguientes subespacios:

- $Col(A) \subset \mathbb{R}^m$.

Subespacios fundamentales

Supongamos que A es una matriz de tamaño $m \times n$. Los cuatro subespacios fundamentales de A son los siguientes subespacios:

- $Col(A) \subset \mathbb{R}^m$.
- $Ren(A) = Col(A^T) \subset \mathbb{R}^n$.

Subespacios fundamentales

$\underbrace{A}_{m\times n}\underbrace{x}_{n\times 1}=0$

Supongamos que A es una matriz de tamaño $m \times n$. Los cuatro subespacios fundamentales de A son los siguientes subespacios:

- $Col(A) \subset \mathbb{R}^m$.
- $Ren(A) = Col(A^T) \subset \mathbb{R}^n$.
- $Nul(A) \subset \underline{\underline{\mathbb{R}^n}}$.

Subespacios fundamentales

$A^T \to n \times m$

Supongamos que A es una matriz de tamaño $m \times n$. Los cuatro subespacios fundamentales de A son los siguientes subespacios:

- $Col(A) \subset \mathbb{R}^m$.
- $Ren(A) = Col(A^T) \subset \mathbb{R}^n$.
- $Nul(A) \subset \mathbb{R}^n$.
- $Nul(A^T) \subset \mathbb{R}^m$.

Subespacios fundamentales

Los subespacios fundamentales asociados a una matriz están relacionados de la siguiente manera.

Subespacios fundamentales

Los subespacios fundamentales asociados a una matriz están relacionados de la siguiente manera.

Teorema: Supongamos que A es una matriz de tamaño $m \times n$, entonces

$$(Col(A))^{\perp} = Nul(A^T),$$

Subespacios fundamentales

Los subespacios fundamentales asociados a una matriz están relacionados de la siguiente manera.

Teorema: Supongamos que A es una matriz de tamaño $m \times n$, entonces

$$(Col(A))^{\perp} = Nul(A^T),$$

$$(Nul(A))^{\perp} = Col(A^T) = Ren(A).$$

Ejemplos

Ejemplo: Sea

$$W = gen\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Encontrar una base para $W^{\perp}$.

Ejemplos

Ejemplo: Sea

$$W = gen\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Encontrar una base para $W^{\perp}$.

Solución: Notemos que $W = Col(A)$, donde

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\\1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}.$$

Así $W^{\perp} = (Col(A))^{\perp}$

$$= \underline{\underline{Nul(A^T)}}$$

$W^{\perp} = \text{Nul}(A^T)$ $\qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

z, w son variables libres

De la segunda fila $y = 0$.

De la primera $x + z = 0$. $x = -z$.

Así $W^{\perp}$ contiene los vectores

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \\ w \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto

$$W^{\perp} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$W = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Una base para $W^{\perp}$ es $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \right\}$

Preguntas

Ejemplos

Ejemplo: Sea

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y - z = 0 \right\}.$$

Encontrar una base para $V^\perp$.

Ejemplos

Ejemplo: Sea

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y - z = 0 \right\}.$$

Encontrar una base para $V^{\perp}$.

Solución: Notemos que $V = \mathrm{Nul}(A)$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

$V^{\perp} = (\mathrm{Nul}(A))^{\perp} = \mathrm{Col}(A^T) = \mathrm{Col}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$.

Una base para $V^\perp$ está dada

por $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$

Preguntas

Tarea

Tarea: Encontrar una base para $W^{\perp}$ si

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + y + z - w = 0, \quad z + x + 2w = 0. \right\}.$$

Proyecciones ortogonales

Supongamos que $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector de $\mathbb{R}^n$ y sea $W \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio. Entonces el vector v se puede descomponer de la forma

Proyecciones ortogonales

Supongamos que $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector de $\mathbb{R}^n$ y sea $W \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio. Entonces el vector v se puede descomponer de la forma

$$\boxed{v = w + w^{\perp},}$$

con $w \in W$ y $w^{\perp} \in W^{\perp}$.

Proyecciones ortogonales

Supongamos que $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector de $\mathbb{R}^n$ y sea $W \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio. Entonces el vector v se puede descomponer de la forma

$$v = w + w^{\perp},$$

con $w \in W$ y $w^{\perp} \in W^{\perp}$.
Esta descomposición se llama la descomposición ortogonal de v respecto a $\underline{W}$ y $\underline{W^{\perp}}$.

Proyecciones ortogonales

Supongamos que $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector de $\mathbb{R}^n$ y sea $W \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio. Entonces el vector v se puede descomponer de la forma

$$v = w + w^{\perp},$$

con $w \in W$ y $w^{\perp} \in W^{\perp}$.

Esta descomposición se llama la descomposición ortogonal de v respecto a W y $W^{\perp}$. En este caso escribimos

$$\boxed{w = proy_W(v),}$$
$$w^{\perp} = perp_W(v) = proy_{W^{\perp}}(v).$$

Proyecciones ortogonales

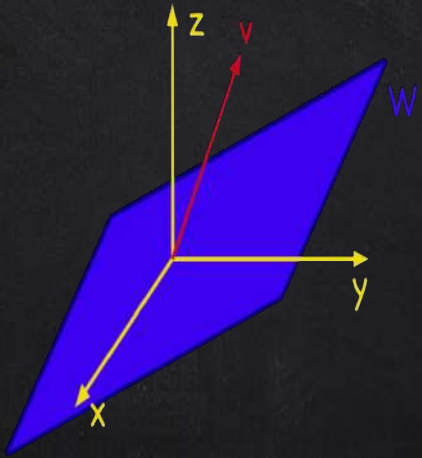
Por lo tanto, si $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector y $W \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio tenemos que

$$v = proy_W(v) + perp_W(v) = \boxed{proy_W(v) + proy_{W^\perp}(v).} = v$$

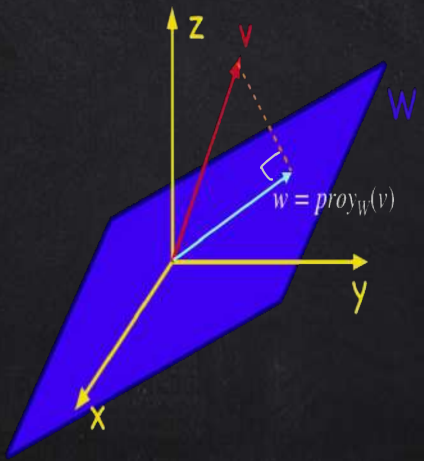
y además

$$proy_W(v) \in W, \ proy_{W^\perp}(v) \in W^\perp.$$

Proyecciones ortogonales

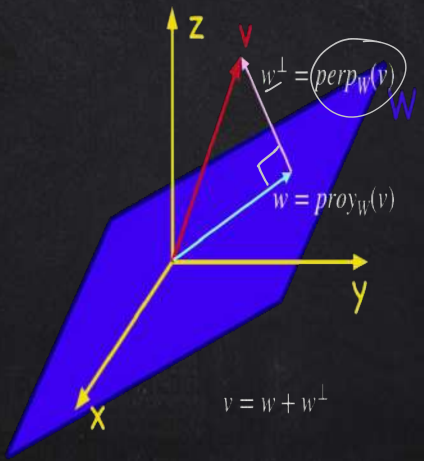


Proyecciones ortogonales



Proyecciones ortogonales

$proy_{W^\perp}(v)$



Proyecciones ortogonales

Supongamos que $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector de $\mathbb{R}^n$ y sea $W \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio. La proyección ortogonal de v sobre W se puede calcular de la siguiente manera.

Proyecciones ortogonales

Supongamos que $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector de $\mathbb{R}^n$ y sea $W \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio. La proyección ortogonal de v sobre W se puede calcular de la siguiente manera. Fijemos una base ortogonal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ para W. Entonces:

Proyecciones ortogonales

Supongamos que $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector de $\mathbb{R}^n$ y sea $W \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio. La proyección ortogonal de v sobre W se puede calcular de la siguiente manera. Fijemos una base ortogonal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ para W. Entonces:

$$\text{proy}_W(v) = \underbrace{\boxed{\left(\frac{v \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1}}_{\text{proy}_{v_1}(v)} + \underbrace{\boxed{\left(\frac{v \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2}\right) v_2}}_{\text{proy}_{v_2}(v)} + \cdots + \underbrace{\boxed{\left(\frac{v \cdot v_k}{v_k \cdot v_k}\right) v_k,}}_{\text{proy}_{v_k}(v)}$$

Proyecciones ortogonales

Supongamos que $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector de $\mathbb{R}^n$ y sea $W \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio. La proyección ortogonal de v sobre W se puede calcular de la siguiente manera. Fijemos una base ortogonal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ para W. Entonces:

$$\text{proy}_W(v) = \left(\frac{v \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1 + \left(\frac{v \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2}\right) v_2 + \cdots + \left(\frac{v \cdot v_k}{v_k \cdot v_k}\right) v_k.$$

es decir,

$$\text{proy}_W(v) = proy_{v_1}(v) + proy_{v_2}(v) + \cdots + proy_{v_k}(v).$$

Nota

Nota: La fórmula de proyección de v sobre W dada por

$$\mathrm{Proy}_W(v) = \left(\frac{v \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1 + \left(\frac{v \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2}\right) v_2 + \cdots + \left(\frac{v \cdot v_k}{v_k \cdot v_k}\right) v_k,$$

solamente funciona si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ es una base ortogonal para W.

Preguntas

Ejemplo

Ejemplo: Sean

$$W = gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

y $v = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$. Calcular $proy_W(v)$ y $proy_{W^\perp}(v)$.

Ejemplo

Ejemplo: Sean

$$W = gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

y $v = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$. Calcular $proy_W(v)$ y $proy_{W^\perp}(v)$.

Solución: Si $u_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, entonces

Solución:

$\beta = \{u_1, u_2\}$ es una base para W. Además,

$u_1 \cdot u_2 = -1+0+1 = 0$ y así β es una base ortogonal para W.

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$v \cdot u_1 = 1$

$v \cdot u_2 = -1$

$u_1 \cdot u_1 = 3$

$u_2 \cdot u_2 = 2$

$$\text{proy}_W(v) = \text{proy}_{u_1}(v) + \text{proy}_{u_2}(v)$$

$$= \left(\frac{v \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}\right) u_1 + \left(\frac{v \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2}\right) u_2.$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{-1}{2}\right) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5/6 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar $\text{proy}_{W^\perp}(v)$.

$$\underbrace{v}_{\checkmark} = \underbrace{\text{proy}_W(v)}_{\checkmark} + \underbrace{\text{proy}_{W^\perp}(v)}_{?}$$

$$\text{proy}_{W^\perp}(v) = v - \text{proy}_W(v)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5/6 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución 2

Encontremos $\text{proy}_{W^{\perp}}(\underline{v})$.

$$W = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Encontremos $W^{\perp}$.

$$W = \text{Col}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \qquad W^{\perp} = \text{Nul}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + R_1} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

De la segunda fila obtenemos

$y + 2z = 0$

$\boxed{y = -2z}$;

De la primera fila obtenemos $x + y + z = 0$

$x - 2z + z = 0$

$\boxed{x = z}$;

Por lo tanto $W^{\perp}$ contiene los vectores

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}z\\-2z\\z\end{bmatrix} = z\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

$$v = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$$W^{\perp} = \text{gen}\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}}_{= z}\right\}.$$

Así $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$ es una base ortogonal para $W^{\perp}$.

Así $\text{proy}_{W^{\perp}}(v) = \text{proy}_{z}(v) = \left(\dfrac{v\cdot z}{z\cdot z}\right) z.$ $= \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}.$

Preguntas

Ejemplo

Ejemplo: Sean

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y - z = 0 \right\}$$

y $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Calcular $proy_W(v)$ y $proy_{W^\perp}(v)$.

Se deja de tarea

Ejemplo

Ejemplo: Sean

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y - z = 0 \right\}$$

y $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Calcular $proy_W(v)$ y $proy_{W^\perp}(v)$.

Solución:

Preguntas